ÉCOLE SPÉCIALE DES TRAVAUX PUBLICS, DU BATIMENT ET DE L'INDUSTRIE

CONCOURS COMMUN D'ADMISSION
AUX ÉCOLES SUPÉRIEURES

DES TRAVAUX PUBLICS
DU BATIMENT
DE MÉCANIQUE-ÉLECTRICITÉ
DE TOPOGRAPHIE

SESSION 1975

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

NOTA — *1°) - Il est rappelé que, si u_n désigne une suite,* $\prod_{p=1}^{n} u_p$ *est égal à :* $u_1 \cdot u_2 \ldots\ldots u_n$

2°) - La notation Logx désigne le logarithme népérien de x

Dans tout le problème, U_n et V_n sont deux suites réelles ; U_n et V_n seront dites équivalentes si $U_n = V_n(1+\varepsilon_n)$ avec $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$; on notera alors $U_n \sim V_n$.

I —

1°) - Montrer que si U_n est une suite strictement positive telle que la série de terme général U_n diverge, et si V_n converge vers ℓ quand n tend vers $+\infty$ alors la suite

$$W_n = \frac{\sum_{p=0}^{n} U_p V_p}{\sum_{p=0}^{n} U_p}$$ converge vers ℓ quand n tend vers $+\infty$

2°) - La convergence de W_n entraîne-t-elle celle de U_n ?

3°) - Calculer $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\prod_{p=1}^{n} (1 + 1/p)}$

4°) - Montrer que si U_n et V_n sont strictement positives et si les séries de terme général U_n et V_n divergent et si $U_n \sim V_n$ alors $S_n \sim S'_n$ en appelant S_n et S'_n les sommes partielles respectives :

$$S_n = U_0 + U_1 + \ldots + U_n$$

$$S'_n = V_0 + V_1 + \ldots + V_n$$

5°) - En déduire que $(1 + 1/2 + \ldots + 1/n) \sim \text{Log } n$.

6°) - Montrer plus précisément que $1 + 1/2 + \ldots + 1/n - \text{Log } n$ tend vers une limite γ quand n tend vers $+\infty$ (on ne cherchera pas à calculer γ)

7°) - Montrer que si U_n est le terme général d'une série, $U_n > 0$ et que si $\forall n \geqslant 1$ $\frac{U_{n+1}}{U_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + V_n$

où V_n est le terme général d'une série absolument convergente, alors il existe n_0 tel que $n \geqslant n_0$

$\Rightarrow \text{Log}\frac{U_n + 1}{U_n} = -\frac{\lambda}{n} + W_n$ où $\sum_{n=n_0}^{+\infty} |W_n|$ converge.

8°) - En déduire qu'il existe $A > 0$ tel que $U_n \sim \frac{A}{n^\lambda}$ lorsque n tend vers $+\infty$

9°) - Étudier la série $U_n = \dfrac{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \ldots (2n)(2n+2)}$

10°) - Soit U_n une suite ; on dit que la série de terme général U_n converge au sens de Cesaro si la suite σ_n converge

lorsque $\sigma_n = \dfrac{S_0 + S_1 + S_2 + \ldots + S_n}{n+1}$ où $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_n$

Dire rapidement pourquoi si la série de terme général U_n est convergente, elle converge au sens de Cesaro.

11°) - Soit la série de terme général U_n. On suppose que cette série converge au sens de Cesaro et que $\lim\limits_{n \to +\infty} nU_n = 0$

II –

Montrer alors que la série de terme général U_n est convergente

On considère la suite définie par récurrence $U_{n+1} = U_n + U_n^2$. On suppose dans cette partie $-1 < U_0 < 0$

1°) Montrer que U_n admet une limite

2°) On pose $V_n = -U_n$. Quelle est la relation de récurrence vérifiée par V_n ?

3°) Montrer que $V_n \sim V_{n+1}$

4°) On pose $a_n = \dfrac{1}{V_n} - \dfrac{1}{V_{n-1}}$. Trouver un équivalent de a_n quand n tend vers $+\infty$ et en déduire un équivalent de V_n quand n tend vers $+\infty$

5°) Quelle est la nature de la série de terme général V_n ? Celle de la série de terme général sin (V_n^2) ? Celle de la série de terme général $\dfrac{V_n}{\sqrt{n}}$?

6°) On pose $b_n = a_n - 1$. Montrer que b_n tend vers zéro quand n tend vers $+\infty$ et trouver un équivalent de b_n.

7°) En déduire la nature de la série $t_n = V_n - {}^1/_n$

III – On considère toujours la suite définie par récurrence $U_{n+1} = U_n + U_n^2$

1°) Comportement de la suite si $U_0 = -1$? si $U_0 = 0$?

2°) Montrer que l'étude de la suite dans le cas où $U_0 < -1$ se ramène à l'étude du cas où $U_0 > 0$
On supposera désormais dans cette partie $U_0 > 0$

3°) Que peut-on dire de U_n quand n tend vers $+\infty$? . Montrer que $U_{n+1} \sim U_n^2$

4°) Montrer que la suite $P_n = \dfrac{\text{Log } U_n}{2^n}$ a une limite λ quand n tend vers $+\infty$ (on ne cherchera pas à calculer λ)

5°) Cette limite λ est une fonction de U_0 seulement. Montrer que $\lambda > 0$, que c'est une fonction croissante de U_0 et que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\lambda - \frac{\text{Log } U_n}{2^n} < \frac{1}{2^n U_n}$$

6°) Quelle est la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{U_n}$? Celle de la série de terme général $\dfrac{(-1)^n n}{U_n}$?

IV – Soit la suite récurrente $U_n = \dfrac{1 + U_{n-1}}{\sqrt{1 + U_{n-1}^2}} - 1$

U_0 fixé dans R

1°) Étudier la suite U_n

2°) Étudier la série de terme général U_n^2

3°) Étudier la série de terme général U_n

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail